

Selectivo PAGMO 2024
República Dominicana
Día 2: Sábado 10 de agosto 2024, 9am

Tiempo: 4 horas

Cada problema vale 10 puntos

Nota: Todos los participantes se comprometen a mantener los problemas en estricta confidencialidad hasta la PAGMO 2024.

Problema 1. Sean a, b enteros positivos y se define

$$n = \frac{(a+b)^2 + 8ab}{a^2 + b^2}$$

Si se sabe que n es entero, hallar todos sus posibles valores.

Problema 2. Sean M y N los puntos medios de los lados CA y CB , respectivamente en el triángulo ABC . La bisectriz del ángulo BAC interseca la recta MN en D . Demuestra que el ángulo $ADC = 90^\circ$.

Problema 3. Demuestra que para todo real x se cumple que $x^4 \geq 4x - 3$.

Problema 4. Con una nuez mágica, la bruja malvada puede convertir una pulga en un escarabajo o una araña en un insecto; mientras que con una bellota mágica puede convertir una pulga en una araña o un escarabajo en un insecto. Por la noche, la bruja malvada había gastado 20 nueces mágicas y 23 bellotas mágicas. Con estas acciones, la cantidad de escarabajos aumentó en 5. Determina cuál fue el cambio en la cantidad de arañas. (Encuentre todas las respuestas posibles y demuestre que las otras respuestas son imposibles).